Автоматика и телемеханика, № 8, 2024

© 2024 г. **Л.Г. АФРАЙМОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (levafraimovich@gmail.com), М.Д. ЕМЕЛИН (makcum888e@mail.ru)**
(Нижегородский государственный университет)

СВЕРТКИ КРИТЕРИЕВ ПРИ КОМБИНИРОВАНИИ РЕШЕНИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Рассматривается трехиндексная аксиальная задача о назначениях, которая является одной из классических NP-трудных задач. В рамках задачи о назначениях ставится задача комбинирования допустимых решений, представляющая собой задачу о назначениях на множестве решений, которые содержат только компоненты выбранных допустимых решений. Исследуются вопросы комбинирования решений для многокритериальной задачи с различными видами сверток критериев. В общем случае задача комбинирования оказывается NP-трудной. В работе выделяются условия, при которых задача комбинирования полиномиально разрешима.

Ключевые слова: аксиальная задача о назначениях, многоиндексные задачи, комбинирование решений, полиномиальная разрешимость, NP-трудность.

DOI: 10.31857/S0005231024080063, **EDN:** WPFNBF

1. Введение

Существует широкий класс прикладных задач, формализуемых в виде многоиндексных аксиальных задач о назначениях [1–4]. В общем случае класс многоиндексных аксиальных задач о назначениях является NP-трудным [5]. Известны частные полиномиально разрешимые подклассы и подклассы, для которых существуют полиномиальные приближенные алгоритмы [1, 6, 7]. В [6–10] исследуются аксиальные задачи о назначениях со специальной структурой многоиндексной матрицы стоимостей, в [11] описывается метод ветвей и границ решения аксиальной задачи о назначениях, в [12] обсуждается параллельная реализация алгоритма решения, в [13] строится генетический алгоритм, в [14] обсуждается нижняя оценка задачи, в [15] исследуются асимптотически оптимальные решения. Многокритериальные постановки многоиндексных задач о назначениях обсуждаются в [16–19]. В [20–22] рассматривается задача комбинирования решений аксиальной задачи о назначениях.

В данной работе рассматривается многокритериальная трехиндексная аксиальная задача о назначениях. В рамках данной постановки сформулирована задача комбинирования допустимых решений, представляющая собой многокритериальную задачу о назначениях на множестве решений, получаемых комбинированием компонент заданных допустимых решений. В качестве схем компромисса при решении многокритериальных задач рассматривается свертка критериев. В работе исследуются линейная, минимаксная и лексикографические свертки.

Для данных видов сверток исследуются возникающие задачи комбинирования N допустимых решений. В работе получены следующие результаты:

– в случае линейной свертки задача комбинирования полиномиально разрешима при $N = 2$, при $N \geqslant 4$ задача комбинирования NP-трудна,

– в случае лексикографической свертки задача комбинирования полиномиально разрешима при $N = 2$, при $N \geqslant 4$ задача комбинирования NP-трудна,

– в случае минимаксной свертки задача комбинирования NP-трудна при $N \geqslant 2$.

Работа является продолжением серии статьей [20–22], в которых комбинирование исследуется при решении (однокритериальной) аксиальной задачи о назначениях. Под комбинированием решений здесь понимается построение такого решения, которое содержит только назначения из выбранных допустимых решений. Решение задачи комбинирования, в свою очередь, предполагает поиск оптимального (с точки зрения выбранного критерия или схемы компромисса) решения на множестве решений, получаемых в результате комбинирования выбранных допустимых решений.

Отметим, что исходная многокритериальная трехиндексная аксиальная задача о назначениях с рассматриваемыми видами сверток в качестве схемы компромисса является NP-трудной. Таким образом, предложенные алгоритмы комбинирования для найденных полиномиально разрешимых случаев могут быть применены в качестве дополнения к эвристическим или приближенным алгоритмам решения исходных NP-трудных задач. Значительное количество эвристических или приближенных алгоритмов решения задач о назначениях основаны на построении серии допустимых решений с дальнейшим выбором рекорда среди них, например [1, 3, 6]. Вместо общепринятого подхода выбора рекорда среди найденных допустимых решений в работе предлагается применение шага комбинирования построенных допустимых решений. При этом гарантируется, что с точки зрения критерия оптимизации решение, полученное в результате комбинирования, не хуже рекорда (так как множество решений, получаемых в результате комбинирования, в том числе содержит и все найденные исходные допустимые решения).

Далее статья построена следующим образом. В разделе 2 приводится постановка многокритериальной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях и описаны применяемые виды сверток критериев, в разделе 3 ставится задача комбинирования допустимых решений, в разделах 4, 5 и 6 исследуются задачи комбинирования для линейной, лексикографической и минимаксной сверток критериев соответственно. В разделе 7 приводятся результаты вычислительных экспериментов.

2. Многокритериальная трехиндексная аксиальная задача о назначениях

Пусть I, J, K – непересекающиеся множества индексов, $I \cap J = \emptyset$, $I \cap K = \emptyset$, $J \cap K = \emptyset$ и $|I| = |J| = |K| = n$; M – фиксированное количество критериев задачи; c^u_{ijk}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $u = \overline{1, M}$ – трехиндексные матрицы стоимостей; x_{ijk}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ – трехиндексная матрица неизвестных. Тогда многокритериальная трехиндексная аксиальная задача о назначениях ставится как следующая задача целочисленного линейного программирования:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} = 1, \quad k \in K, \tag{1}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 1, \quad j \in J, \tag{2}$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 1, \quad i \in I, \tag{3}$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K, \tag{4}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c^u_{ijk} x_{ijk} \to \min, \quad u = \overline{1, M}. \tag{5}$$

Для удобства многокритериальную задачу (1)–(5) обозначим через Z_M. Как известно, в однокритериальной постановке (при $M = 1$) задача о назначениях Z_M является NP-трудной [5].

В многокритериальной постановке в качестве схемы компромисса будем рассматривать свертку критериев. В работе будут рассмотрены линейная, лексикографическая и минимаксная свертки.

Пусть заданы веса α_u, $u = \overline{1, M}$. Тогда линейная свертка критериев будет иметь вид

$$\sum_{u=1}^{M} \alpha_u \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c^u_{ijk} x_{ijk} \to \min. \tag{6}$$

Для удобства задачу (1)–(4), (6) обозначим через Z_L. Легко увидеть, что к задаче Z_L полиномиально сводима NP-трудная (однокритериальная) трехиндексная аксиальная задача о назначениях. Действительно, рассмотрим трехиндексную аксиальную задачу о назначениях с матрицей стоимостей c_{ijk}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$. В соответствующей задаче Z_L определим $c^1_{ijk} = c_{ijk}$, $c^u_{ijk} = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_u = 0$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $u = \overline{2, M}$. Отсюда

У т в е р ж д е н и е 1. *Задача Z_L NP-трудна.*

Будем предполагать, что порядок значимости критериев (5) совпадает с их исходной индексацией. Тогда введем отношение предпочтения на множестве допустимых решений задачи о назначениях. Обозначим через P множество допустимых решений системы ограничений (1)–(4). Пусть $x^1, x^2 \in P$. Будем записывать $x^1 \preccurlyeq x^2$ тогда и только тогда, когда существует $y \in \{1, \ldots, M\}$ такой, что выполняются условия (7), (8):

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c^u_{ijk}x^1_{ijk} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c^u_{ijk}x^2_{ijk}, \quad u \in \{1, \ldots, y\}, \tag{7}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c^u_{ijk}x^1_{ijk} < \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c^u_{ijk}x^2_{ijk}, \quad u \in \{1, \ldots, M\} \cap \{y+1\}. \tag{8}$$

В результате многокритериальная задача с лексикографической сверткой критериев заключается в поиске x^*, удовлетворяющего системе ограничений:

$$x^* \in P, \tag{9}$$

$$x^* \preccurlyeq x, \quad x \in P. \tag{10}$$

Задачу (9), (10) обозначим через $Z_{\preccurlyeq}$. Несложно увидеть, что к задаче $Z_{\preccurlyeq}$ полиномиально сводима NP-трудная трехиндексная аксиальная задача о назначениях. В соответствующей задаче $Z_{\preccurlyeq}$ определим $c^1_{ijk} = c_{ijk}$, $c^u_{ijk} = 0$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $u = \overline{2, M}$. Отсюда

Утверждение 2. *Задача $Z_{\preccurlyeq}$ NP-трудна.*

Минимаксная свертка критериев будет иметь вид

$$\max_{u\in\{1,\ldots,M\}} \left(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c^u_{ijk}x_{ijk}\right) \to \min\,. \tag{11}$$

Для удобства задачу (1)–(4), (11) обозначим через Z_{minmax}. Легко увидеть, что к задаче Z_{minmax} полиномиально сводима NP-трудная трехиндексная аксиальная задача о назначениях. В соответствующей задаче Z_{minmax} определим $c^u_{ijk} = c_{ijk}$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $u = \overline{1, M}$. Отсюда

Утверждение 3. *Задача Z_{minmax} NP-трудна.*

Таким образом, многокритериальная аксиальная задача о назначениях с линейной, лексикографической или минимаксной сверткой критериев в качестве схемы компромисса является NP-трудной. Отсюда возникает вопрос комбинирования допустимых решений в качестве дополнения к эвристическим или приближенным алгоритмам решения данных NP-трудных задач.

3. Задача комбинирования решений

Пусть задано множество $W \subseteq I \times J \times K$, которое определяет подмножество разрешенных назначений. Рассмотрим задачу (1)–(4), (12), (5).

$$x_{ijk} = 0, \quad (i, j, k) \notin W. \tag{12}$$

Для удобства изложения многокритериальную задачу (1)–(4), (12), (5) для заданного множества W будем обозначать через $Z_M(W)$. Очевидно задача (1)–(5) соответствует задаче $Z_M(I \times J \times K)$.

Далее будем рассматривать многокритериальную задачу $Z_M(W)$ с различными вариантами свертки критериев в качестве схемы компромисса.

В случае линейной свертки критериев соответствующая задача принимает вид (1)–(4), (12), (6), для удобства обозначаемая через $Z_L(W)$.

В случае лексикографической свертки критериев соответствующая задача принимает вид (9), (10), где в качестве множества P применяется множество допустимых решений системы ограничений (1)–(4), (12). Данную задачу обозначим через $Z_{\preccurlyeq}(W)$.

В случае минимаксной свертки критериев соответствующая задача принимает вид (1)–(4), (12), (11), для удобства обозначаемая через $Z_{\text{minmax}}(W)$.

Проблема проверки совместности системы ограничений задачи $Z_M(W)$, т.е. системы (1)–(4), (12), для произвольного множества W является NP-полной [1]. Будем рассматривать такие множества W, которые соответствуют назначениям заданного подмножества допустимых решений.

Пусть x_{ijk}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ – допустимое решение системы ограничений (1)–(4). Тогда через $W(x)$ обозначим следующее множество разрешенных назначений:

$$W(x) = \{(i, j, k) | x_{ijk} = 1, i \in I, j \in J, k \in K\}.$$

Рассмотрим $x^1_{ijk}, \ldots, x^r_{ijk}$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ – произвольные r допустимых решений системы ограничений (1)–(4). Тогда

$$W(x^1, \ldots, x^r) = W(x^1) \cup \ldots \cup W(x^r).$$

Далее в работе будем исследовать задачи

$$Z_L(W(x^1, \ldots, x^r)), \quad Z_{\preccurlyeq}(W(x^1, \ldots, x^r)), \quad Z_{\text{minmax}}(W(x^1, \ldots, x^r)).$$

Данные задачи представляют собой задачи комбинирования – оптимизационные задачи на множестве разрешенных назначений $W(x^1, \ldots, x^r)$, которое строится путем объединения фактических назначений выбранных допустимых решений $x^1, \ldots, x^r$. Таким образом, решение задач комбинирования соответствует решению, которое содержит только назначения выбранных допустимых решений.

4. Линейная свертка критериев

Рассмотрим многокритериальную задачу о назначениях в случае линейной свертки критериев. Несложно увидеть, что задача $Z_L(W(x^1, \ldots, x^r))$ эквивалентна однокритериальной трехиндексной аксиальной задаче с матрицей стоимостей

$$c_{ijk} = \sum_{u \in \{1,\ldots,M\}} \alpha_u c^u_{ijk}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K.$$

Таким образом, согласно [20] задача $Z_L(W(x^1, x^2))$ полиномиально разрешима. Алгоритм комбинирования, предложенный в [20], требует $O(n)$ вычислительных операций и может быть применен при решении задачи $Z_L(W(x^1, x^2))$. Согласно [22] справедливо

Утверждение 4. Класс задач $Z_L(W(x^1, \ldots, x^r))$ при $r \geqslant 4$ является NP-трудным.

Сложностной статус класса задач $Z_L(W(x^1, x^2, x^3))$ на данный момент неизвестен.

5. Лексикографическая свертка критериев

Построим алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях в случае лексикографической свертки критериев при комбинировании двух допустимых решений.

Алгоритм 1 (решение задачи $Z_{\preccurlyeq}(W(x^1, x^2))$).

Шаг 1. Построить граф $G = (V, A)$, где

$$V = \{I \cup J \cup K\}, \quad A = \big\{(i,j), (i,k), (j,k) | (i,j,k) \in W(x^1, x^2)\big\}.$$

Шаг 2. Найти компоненты связности V_l, $l = \overline{1,q}$ графа G и построить подграфы $G_l = (V_l, A_l)$, $l = \overline{1,q}$, порожденные соответствующими компонентами связанности.

Шаг 3. Построить следующие множества:

$$D^1_l = \big\{(i,j,k) | (i,j,k) \in W(x^1), (i,j), (i,k), (j,k) \in A_l\big\}, \quad l = \overline{1,q},$$
$$D^2_l = \big\{(i,j,k) | (i,j,k) \in W(x^2), (i,j), (i,k), (j,k) \in A_l\big\}, \quad l = \overline{1,q}.$$

Шаг 4. Пусть

$$P^1_l = \left\{ p | p = \operatorname*{argmin}_{p \in \{1,2\}} \sum_{(i,j,k) \in D^p_l} c^1_{ijk} \right\},$$

$$P^u_l = \left\{ p | p = \operatorname*{argmin}_{p \in P^{u-1}_l} \sum_{(i,j,k) \in D^p_l} c^u_{ijk} \right\}, \quad u = \overline{2, M-1},$$

$$p^*_l = \operatorname*{argmin}_{p \in P^{M-1}_l} \sum_{(i,j,k) \in D^p_l} c^M_{ijk}, \quad l = \overline{1,q}.$$

Шаг 5. Решение задачи $Z_{\preccurlyeq}(W(x^1, x^2))$ определяется по следующему алгоритму. Пусть $x^*_{ijk} := 0$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$. Далее для каждого $l = \overline{1,q}$

выполнить

$$x^*_{ijk} := 1, \quad (i,j,k) \in D_l^{p_l^*}.$$

При этом значение критериев (5) на решении x^* определяется как

$$\sum_{l=1}^{q} \sum_{(i,j,k)\in D_l^{p_l^*}} c^u_{ijk}, \quad u = \overline{1,M}.$$

Теорема 1. Алгоритм 1 находит решение задачи $Z_{\preccurlyeq}(W(x^1,x^2))$.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что решение, полученное алгоритмом 1, не является решением задачи $Z_{\preccurlyeq}(W(x^1,x^2))$. Тогда существует допустимое решение x задачи $Z_{\preccurlyeq}(W(x^1,x^2))$ такое, что не выполняется условие $x^* \preccurlyeq x$.

Согласно доказательству [20, теорема 1] в каждой компоненте связности V_l, $l=\overline{1,q}$, любое допустимое решение задачи $Z_{\preccurlyeq}(W(x^1,x^2))$ может содержать назначения, состоящие из троек только первого или только второго решения.

По предположению, существует компонента связности V_l, в которой назначения решения x не совпадают с назначениями решения x^*. Тогда построим решение x' следующим образом:

Шаг 1. $x^0 = x,\ l = 1.$

Шаг 2. $x^t_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{если} (i,j,k) \in D_l^{p_l^*}, \\ 0, \text{если} (i,j,k) \in D_l^{3-p_l^*}, \\ x^{t-1}_{ijk} \quad \text{иначе}, \end{cases} \qquad i \in I,\ j \in J,\ k \in K,$

Шаг 3. Если $l = q$, закончить, иначе $l = l + 1$, перейти на шаг 2.

Тогда по построению $x^{l+1} \preccurlyeq x^l$, $l = \overline{0,q-1}$. При этом $x^q = x^*$, $x^0 = x$. Отсюда $x^* \preccurlyeq x$. Получили противоречие. Предположение неверно. Теорема доказана.

Согласно [20, теорема 2] справедливо

Утверждение 5. Алгоритм 1 требует $O(n)$ вычислительных операций.

Несложно увидеть, что к классу задач $Z_{\preccurlyeq}(W(x^1,x^2,x^3,x^4))$ полиномиально сводим класс трехиндексных аксиальных задач с множеством разрешенных назначений вида $W(x^1,x^2,x^3,x^4)$, который, как было доказано в [22], является NP-трудным. Действительно, рассмотрим трехиндексную аксиальную задачу о назначениях с матрицей стоимостей c_{ijk}, $i \in I,\ j \in J,\ k \in K$. При сведении в соответствующей задаче $Z_{\preccurlyeq}(W(x^1,x^2,x^3,x^4))$ определим $c^1_{ijk} = c_{ijk}$, $c^u_{ijk} = 0$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$, $u = \overline{2,M}$. Отсюда

Утверждение 6. Класс задач $Z_{\preccurlyeq}(W(x^1,\ldots,x^r))$ при $r \geqslant 4$ является NP-трудным.

Сложностной статус класса задач $Z_{\preccurlyeq}(W(x^1,x^2,x^3))$ на данный момент неизвестен.

6. Минимаксная свертка критериев

Рассмотрим многокритериальную задачу о назначениях в случае минимаксной свертки критериев.

Лемма 1. Оптимизационная задача (13), (14) *NP-трудна:*

$$x'_i \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{13}$$

$$\max\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x'_i, \sum_{i=1}^{n} b_i(1-x'_i)\right) \to \min\,. \tag{14}$$

Доказательство. Для доказательства данной леммы полиномиально сведем к задаче (13), (14) классическую NP-полную задачу РАЗБИЕНИЯ [5]. Рассмотрим задачу РАЗБИЕНИЯ с исходными параметрами w_i, $i = \overline{1,m}$. Определим $n = m$, $a_i = b_i = w_i$, $i = \overline{1,n}$. Оптимальное значение критерия задачи (13), (14) равно $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_i$ тогда и только тогда, когда задача РАЗБИЕНИЯ имеет решение. Следовательно, задача (13), (14) является NP-трудной. Лемма доказана.

Теорема 2. Класс задач $Z_{\mathrm{minmax}}(W(x^1,x^2))$ *NP-трудный.*

Доказательство. Покажем полиномиальную сводимость NP-трудной задачи (13), (14) к классу задач $Z_{\mathrm{minmax}}(W(x^1,x^2))$.

Пусть $N = 2n$, $I = J = K = \{1,\dots,N\}$, $M = 2$. Трехиндексные матрицы стоимостей c^1_{ijk}, c^2_{ijk}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ определим следующим образом:

$$c^1_{ijk} = \begin{cases} a_q, & \text{если } \exists q \in \{1,\dots,n\}, \text{ что } i = j = k = 2q-1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \qquad i \in I,\ j \in J,\ k \in K,$$

$$c^2_{ijk} = \begin{cases} b_q, & \text{если } \exists q \in \{1,\dots,n\}, \text{ что } i = j = k+1 = 2q, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \qquad i \in I,\ j \in J,\ k \in K.$$

Построим два подмножества $P_1, P_2 \subseteq I \times J \times K$, определяющих два допустимых решения системы (1)–(4):

$$P_1 = \{(i,i,i) | i = \overline{1,N}\},$$
$$P_2 = \{(2i-1, 2i-1, 2i), (2i, 2i, 2i-1) | i = \overline{1,n}\}.$$

Соответствующие два допустимых решения x^1, x^2 системы (1)–(4) определим как

$$x^t_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,j,k) \in P_t, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \qquad i \in I,\ j \in J,\ k \in K,\ t \in \{1,2\}.$$

Далее рассмотрим соответствующую задачу комбинирования $Z_{\mathrm{minmax}}(W(x^1,x^2))$. Покажем, что оптимальное значение критерия задачи (13), (14) совпадает с оптимальным значением критерия задачи $Z_{\mathrm{minmax}}(W(x^1,x^2))$.

1. Пусть x'^* – оптимальное решение задачи (13), (14), тогда построим $P(x'^*)$ следующим алгоритмом:

Шаг 1. $P(x'^*) = \emptyset$.

Шаг 2. Для каждого $i = \overline{1,n}$:
если $x_i'^* = 1$, тогда $P(x'^*) = P(x'^*) \cup \{(2i-1, 2i-1, 2i-1), (2i, 2i, 2i)\}$,
иначе $P(x'^*) = P(x'^*) \cup \{(2i-1, 2i-1, 2i), (2i, 2i, 2i-1)\}$.

Нетрудно увидеть, что значение критерия задачи $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$ на решении, соответствующем $P(x'^*)$, совпадет с оптимальным значением критерия задачи (13), (14). Докажем это от противного. Предположим, что решение, соответствующее $P(x'^*)$, не является оптимальным в задаче $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$. Пусть x^* – оптимальное решение задачи $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$. Тогда значение критерия задачи $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$ на решении x^* строго меньше значения критерия задачи (13), (14) на решении x'^*. Тогда построим допустимое решение x' задачи (13), (14) следующим способом:

$$x_i' = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{iii}^* = 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}.$$

По построению значение критерия задачи (13), (14) на решении x' совпадает со значением критерия задачи $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$ на решении x^*. Следовательно, x'^* не является оптимальным решением задачи (13), (14). Получили противоречие, предположение неверно. Отсюда значение критерия задачи $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$ на решении, соответствующем $P(x'^*)$, совпадет с оптимальным значением критерия задачи (13), (14).

2. Пусть x^* – оптимальное решение задачи $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$, тогда построим оптимальное решение задачи (13), (14) следующим способом:

$$x_i' = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{iii}^* = 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}.$$

Нетрудно увидеть, что значение критерия задачи (13), (14) на решении x' совпадает с оптимальным критерием задачи $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$. Докажем от противного.

Предположим, что решение x' не является оптимумом в задаче (13), (14). Пусть x'^* – оптимальное решение задачи (13), (14). Тогда значение критерия задачи (13), (14) на решении x'^* строго меньше значения критерия задачи $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$ на решении x^*. Построим решение задачи $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$ следующим алгоритмом:

Шаг 1. $P(x'^*) = \emptyset$.

Шаг 2. Для каждого $i = \overline{1,n}$:
если $x_i'^* = 1$, тогда $P(x'^*) = P(x'^*) \cup \{(2i-1, 2i-1, 2i-1), (2i, 2i, 2i)\}$,
иначе $P(x'^*) = P(x'^*) \cup \{(2i-1, 2i-1, 2i), (2i, 2i, 2i-1)\}$.

По построению значения критерия задачи $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$ на решении, соответствующем $P(x'^*)$, совпадает со значением критерия задачи (13), (14) на решении x'^*. Следовательно, x^* не является оптимальным решением задачи $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$. Получили противоречие, предположение неверно. Отсюда значение критерия задачи (13), (14) на решении x' совпадет с оптимальным значением критерия задачи $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$.

Таким образом, задача (13), (14) полиномиально сводима к классу задач $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$. Следовательно, класс задач $Z_{\text{minmax}}(W(x^1, x^2))$ является NP-трудным. Теорема доказана.

7. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим задачу $Z_{\preccurlyeq}$ при $M = 2$. По аналогии с [12] построим тестовый набор с трехиндексными матрицами стоимостей, элементы которых сгенерированы с целочисленными значениями, равномерно распределенными на отрезке [0,300]. Будем проводить серии экспериментов при фиксированных значениях n, количество задач в серии обозначим через K. Построим два эвристических алгоритма для решения задачи $Z_{\preccurlyeq}$. Первый алгоритм основан на построении подмножеств допустимых решений и выборе среди них рекорда, второй – аналогичен первому, но шаг выбора рекорда заменен на последовательное комбинирование решений при помощи алгоритма 1. Отметим, что согласно утверждению 5 алгоритм 1 имеет сложность $O(n)$, что совпадает со сложностью выбора рекорда.

Эвристический алгоритм 1. Построим $N = n^3$ случайных решений, к каждому из которых применим алгоритм локальной оптимизации [13]. Полученные допустимые решения задачи $Z_{\preccurlyeq}$ обозначим через x'_t, $t = \overline{1, N}$. Тогда в качестве решения алгоритма выберем рекорд из полученных решений $x^* : x^* \preccurlyeq x'_t$, $t = \overline{1, N}$.

Эвристический алгоритм 2. Вместо шага выбора рекорда будем последовательно комбинировать пары решений при помощи алгоритма 1 следующим образом. Пусть x''_1 является решением задачи $Z_{\preccurlyeq}(W(x'_1, x'_2))$. Далее через x''_t обозначим решение задачи $Z_{\preccurlyeq}(W(x''_{t-1}, x'_{t+1}))$, $t = \overline{2, N-1}$. В качестве решения алгоритма выберем x''_{N-1}.

Через $C^1(x), C^2(x)$ обозначим значения критериев (5) на решении x. Будем сравнивать среднее отклонение значений критериев при комбинировании (эристический алгоритм 2) и значений критериев при выборе рекорда (эвристический алгоритм 1) в сериях. Полученные результаты приведены в табл. 1.

Таким образом, среднее отклонение для первого критерия по всем сериям составляет 3,94%, для второго – по всем сериям составляет 0,7%, что демонстрирует эффективность применения стратегии комбинировании вместо общепринятой стратегии выбора рекорда.

Случай линейной свертки эквивалентен однокритериальной задаче с линейным критерием и рассмотрен в работах [20, 21], которые также содержат результаты вычислительного эксперимента. Случай минимаксной свертки в

Таблица 1

n	K	$100\% \dfrac{C^1(x^*) - C^1(x''_{N-1})}{C^1(x^*)}$	$100\% \dfrac{C^2(x^*) - C^2(x''_{N-1})}{C^2(x^*)}$
10	10	3,09%	1,98%
11	10	5,3%	−6,23%
12	10	5,31%	6,58%
13	10	2,05%	0,46%
14	10	0%	0%
15	10	1,26%	−1,85%
16	10	2,5%	2,14%
17	10	2,74%	−4,92%
18	10	3,19%	−0,7%
19	10	7,08%	2,3%

вычислительном эксперименте не рассматривается, так как согласно теореме 2 задача комбинирования с минимаксной сверткой является NP-трудной уже при комбинировании двух решений.

8. Заключение

В результате исследования алгоритмов решения NP-трудной многокритериальной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях с различными видами сверток критериев в качестве схемы компромисса в данной работе сформулирована задача комбинирования допустимых решений задачи. Комбинирование решений может быть применено в качестве дополнения к известным эвристическим или приближенным алгоритмам для постобработки полученных приближенных решений задачи о назначениях вместо общепринятой практики выбора рекорда.

Исследован сложностной статус комбинирования решений и показано, что в случае линейной или лексикографической свертки комбинирование пар решений может быть выполнено за время $O(n)$, класс задач комбинирования четырех и более решений является NP-трудным, сложностной статус комбинирования трех решений – открытая проблема. В случае минимаксной свертки класс задач комбинирования двух и более решений является NP-трудным. Полученные результаты приведены для наглядности в табличном виде (см. табл. 2).

В работе построен алгоритм комбинирования пар решений для случая лексикографической свертки. Приведены результаты комбинирования, показы-

Таблица 2

	$Z_L(W(x^1,\ldots,x^r))$	$Z_{\preccurlyeq}(W(x^1,\ldots,x^r))$	$Z_{\text{minmax}}(W(x^1,\ldots,x^r))$
$r = 2$	$O(n)$	$O(n)$	NP-трудный
$r = 3$	?	?	
$r \geqslant 4$	NP-трудный	NP-трудный	

вающие снижение отклонения от оптимума при проведении вычислительного эксперимента.

Дальнейшим направлением исследования является изучение открытых случаев комбинирования трех решений и исследование комбинирования решений при построении Парето-оптимальных решений многокритериальной задачи о назначениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Spieksma F.C.R.* Multi Index Assignment Problems. Complexity, Approximation, Applications. P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.) / Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000. P. 1–11.
2. *Burkard R., Dell'Amico M., Martello S.* Assignment problems: revised reprint. PA: SIAM, 2012.
3. *Kuroki Y., Matsui T.* An approximation algorithm for multidimensional assignment problems minimizing the sum of squared errors // Discret. Appl. Math. 2009. V. 157. No. 9. P. 2124–2135.
4. *Poore A.B.* Multidimensional Assignment Problems Arising in Multitarget and Multisensor Tracking. P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.) / Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000. P. 13–38.
5. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
6. *Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation Algorithms for Three-Dimensional Assignment Problems with Triangle Inequalities // Eur. J. Oper. Res. 1992. V. 60. P. 273–279.
7. *Bandelt H.J., Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation algorithms for multidimensional assignment problems with decomposable costs // Discret. Appl. Math. 1994. V. 49. P. 25–50.
8. *Burkard R.E., Rudolf R., Woeginger G.J.* Three-dimensional axial assignment problems with decomposable cost coefficients // Discret Appl. Math. 1996. V. 65. P. 123–139.
9. *Spieksma F., Woeginger G.* Geometric three-dimensional assignment problems // Eur. J. Oper. Res. 1996. V. 91. P. 611–618.
10. *Custic A., Klinz B., Woeginger G.J.* Geometric versions of the three-dimensional assignment problem under general norms // Discret. Optim. 2015. V. 18. P. 38–55.
11. *Balas E., Saltzman M.J.* An Algorithm for the Three-Index Assignment Problem // Oper. Res. 1991. V. 39. No. 1. P. 150–161.
12. *Natu S., Date K., Nagi R.* GPU-accelerated Lagrangian heuristic for multidimensional assignment problems with decomposable costs // Parallel Comput. 2020. V. 97. 102666.
13. *Huang G., Lim A.* A hybrid genetic algorithm for the Three-Index Assignment Problem // Eur. J. Oper. Res. 2006. V. 172. P. 249–257.
14. *Kim B.J., Hightower W.L., Hahn P.M., Zhu Y.R., Sun L.* Lower bounds for the axial three-index assignment problem // Eur. J. Oper. 2010. V. 202. P. 654–668.

15. *Дичковская С.А., Кравцов М.К.* Исследование полиномиальных алгоритмов решения трехиндексной планарной проблемы выбора // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. 2006. Т. 46. № 2. С. 222–228.
16. *Дичковская С.А., Кравцов М.К.* Исследование полиномиальных алгоритмов решения многокритериальной трехиндексной планарной задачи о назначениях // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. 2007. Т. 47. № 6. С. 1077–1086.
17. *Емеличев В.А., Перепелица В.А.* Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная математика. 1994. Т. 6. Вып. 1. С. 3–33.
18. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальные многоиндексные задачи объемнокалендарного планирования // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 78–82.
19. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // АиТ. 1996. № 2. С. 24–29.
20. *Афраймович Л.Г., Емелин М.Д.* Комбинирование решений аксиальной задачи о назначениях // АиТ. 2021. № 8. С. 159–168.
Afraimovich L.G., Emelin M.D. Combining solutions of the axial assignment problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 8. P. 1418–1425.
21. *Афраймович Л.Г., Емелин М.Д.* Эвристические стратегии комбинирования решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях // АиТ. 2021. № 10. С. 6–12.
Afraimovich L.G., Emelin M.D. Heuristic Strategies for Combining Solutions of the Three-Index Axial Assignment Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 10. 1635–1640.
22. *Afraimovich L.G., Emelin M.D.* Complexity of Solutions Combination for the Three-Index Axial Assignment Problem // Mathematics. 2022. V. 10. No. 7. 1062.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 04.03.2024

После доработки 21.05.2024

Принята к публикации 27.06.2024